

MÉTODO NUMÉRICO COMPACTO DE QUARTA ORDEM APLICADO NUM MODELO BI-DIMENSIONAL COM ESTENOSE. Jackeline Moraes Malheiros, Paulo Fernando de Arruda Mancera – Matemática – Física Médica – Departamento de Bioestatística – Instituto de Biociências – Campus de Botucatu.

O emprego cada vez maior da matemática e o uso de computadores em biologia abriu novos caminhos para o estudo da circulação como uma unidade funcional, não apenas por facilitar as tarefas de análise estatística e numérica, mas dando ao investigador liberdade de exprimir seus dados ou hipóteses em forma lógica ou matemática mais apropriada.

Com o crescente aumento do índice de doenças cardiovasculares, especialmente as de origem ateroscleróticas, o fluxo sanguíneo deve ser investigado. Uma vez compreendido o comportamento do fluxo, pode-se comparar a relação existente entre estas lesões e o padrão de fluxo local, para que as mesmas possam ser diagnosticadas pela detecção de distúrbios na velocidade do fluxo.

O objetivo deste trabalho é estudar o escoamento num canal bidimensional com uma oclusão retangular usando um método numérico compacto de quarta ordem desenvolvido por Mancera e Hunt (ver [1] e [2]). Métodos numéricos de segunda ordem e de alta ordem para resolver as equações de Navier-Stokes têm sido usados em vários problemas de fluxo de fluidos, como por exemplo, o problema da cavidade e do degrau. Entretanto métodos compactos de diferenças finitas de quarta ordem não têm sido estudados e analisados em problemas onde há ressaltos. Fluxos em ressaltos têm grande importância em, por exemplo, biomedicina, desde que pode ser considerado um modelo de estenose bi-dimensional. Nesse trabalho consideramos um problema bidimensional com ressaltos, em que há dois pontos singulares, sendo que as equações de Navier-Stokes são resolvidas por um método compacto de quarta ordem.

As equações de Navier-Stokes, em malha uniforme, na formulação função corrente são dadas por

$$\nabla^2 \psi = -\zeta, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \zeta = \text{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \quad (2)$$

onde Re é o número de Reynolds, ψ a função corrente e ζ a vorticidade.

Para resolver as equações de Navier-Stokes em malhas não-uniformes, consideramos as seguintes transformações

$$x = f(\xi), \quad y = g(\eta) \quad (3)$$

em que $f(\xi)$ e $g(\eta)$ são funções dadas.

Então, as equações (1) e (2) podem ser escritas como

$$D^2 \psi = -\zeta, \quad (4)$$

$$D^2 \zeta = \frac{\text{Re}}{f'g'} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right), \quad (5)$$

em que

$$D^2 \equiv \frac{1}{f'^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{f''}{f'^3} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{g'^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{g''}{g'^3} \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (6)$$

Escolhemos

$$f(\xi) = \frac{\Delta x_0}{k} \sinh(k\xi) \quad (7)$$

$$g(\eta) = \eta + \frac{1 - \Delta y_0}{2\pi} \sin(2\pi\eta) \quad (8)$$

Para o cálculo dos erros, no caso do erro global, usamos a seguinte norma

$$L_2 = \left(\frac{1}{N} \sum \left((\phi_F)_{ij} - (\phi_M)_{ij} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (9)$$

em que ϕ_F e ϕ_M são duas soluções calculadas, uma com o dobro de pontos do que a outra.

A seguir apresentamos as idéias para se construir um método compacto de quarta ordem em malha uniforme proposto por Mancera e Hunt [1], mas que pode ser expandindo para malhas não-uniformes e ordem maior do que 4 (ver Mancera e Hunt [2]). Observamos que todos os cálculos são feitos via o programa Maple e as substituições algébricas são feitas dentro do programa principal.

1. Escrever as equações:

eqn1:=uxx+uyy+v e

eqn2:=vxx+vyy-re*(uy*v_x-ux*v_y), em que u_x (v_x), u_y (v_y), u_{xx} (u_{xx}), u_{yy} (u_{yy}) são as derivadas da função corrente u (vorticidade v) e re é o número de Reynolds.

2. Expandir u e v em séries Taylor.

3. Calcular as derivadas de u e v das expansões.

4. Aproximar essas derivadas usando diferença central de segunda ordem.

5. Manipular as expressões obtidas anteriormente para se ter os coeficientes das equações de quarta ordem

eqn1=a00-hx**2*a20-hy**2*a02 e

eqn2=b00-hx**2*b20-hy**2*b02, as quais fornecem o método numérico.

Os coeficientes são dados por:

a00=u20+u02+v00, a20 = u40/12,

a02=u04/12,

b00=(-u01*v10+u10*v01)*re+v20+v02,

b20=(-u01*v30/6+u30*v01/6)*re+v40/12,

b02=(-u03*v10/6+u10*v03/6)*re+v04/12,

u03=-u21-v01, u30 = -v10-u12,

u04=-u22-v02, u40 = -v20-u22,

v03=-v21+re*u01*v11+re*u02*v10-re*u10*v02-re*u11*v01,

v30=-v12+re*u01*v20-re*u20*v01+re*u11*v10-re*u10*v11,

v04=-v22+re*u01*v12+2*re*u02*v11+re*u03*v10-re*u10*v03-2*re*u11*v02-re*u12*v01,

v40=-v22+re*u01*v30+2*re*u11*v20-re*u10*v21-2*re*u20*v11-re*u30*v01+re*u21*v10, em

que u_{ij}, v_{ij} (i,j=0,1,2) são as aproximações de segunda ordem para as derivadas.

Abaixo são mostrados os resultados, onde nas tabelas apresentamos os erros e as figuras são as linhas-de-corrente para três casos.

Erros malha uniforme (a)

Re	Quarta ordem	Segunda ordem
10	2.43 10 ⁻⁵	2.54 10 ⁻⁴
100	4.32 10 ⁻⁵	4.18 10 ⁻⁴

Erros malha uniforme em y e não-uniforme em x (b)

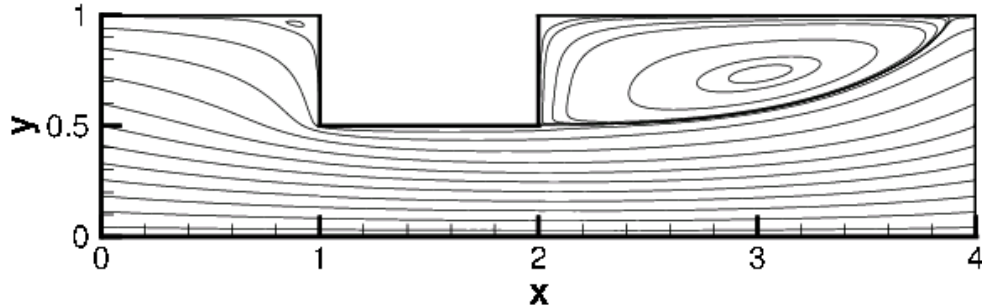
Re	Quarta ordem	Segunda ordem
10	5.35 10 ⁻⁵	7.63 10 ⁻⁵
100	9.46 10 ⁻⁵	8.95 10 ⁻⁵

(a): as fórmulas para a vorticidade na fronteira são de segunda ordem; (b) as fórmulas para a vorticidade na fronteira são de quarta ordem.

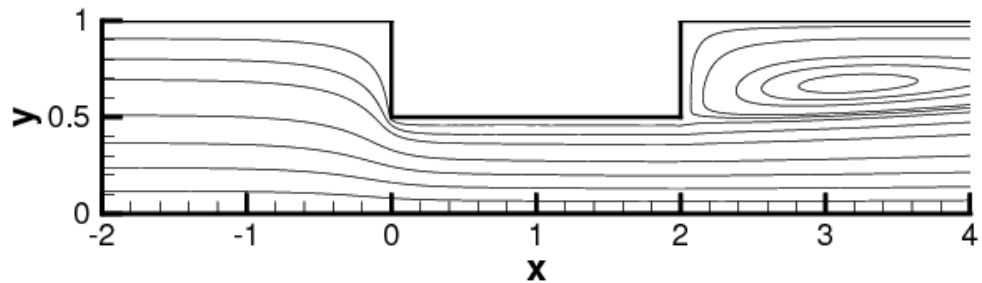
Erros malha não-uniforme em ambas as direções

Re	Quarta ordem
10	$9.35 \cdot 10^{-5}$
100	$1.40 \cdot 10^{-4}$

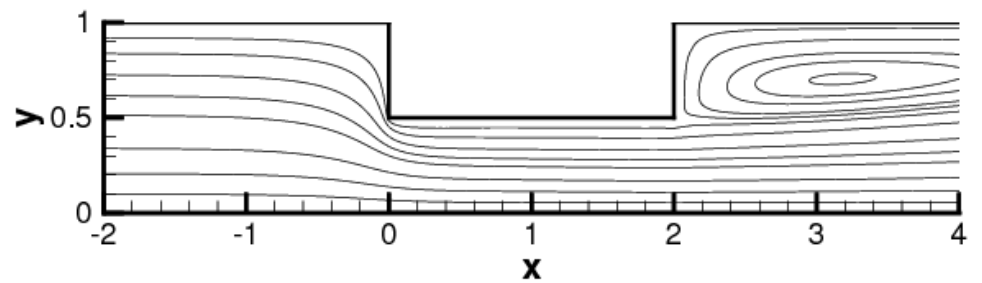
Em relação às figuras, no caso uniforme a dimensão do canal é (0,4), enquanto no não-uniforme é (-2,4700)—aqui representado no intervalo (-2,4). Notamos a necessidade de um canal mais longo para a correta descrição do escoamento.



Linhas de correntes (caso uniforme): Re=100.



Linhas de correntes (caso não-uniforme em x): Re=100.



Linhas de correntes (caso não-uniforme em x e y): Re=100.

O uso de malha não-uniforme possibilita concentrar mais pontos no afunilamento e na expansão, sem a necessidade de muitos pontos na malha. Entretanto em muitas situações o método de Newton – usado para a resolução do sistema de equações resultante da discretização – não converge, pois é sensível aos parâmetros em (8).

Os resultados corroboram com resultados apresentados em Mancera e Hunt [1, 2], e ilustram a aplicabilidade dos métodos propostos.

Observamos que as localizações de separação e recirculação são sensíveis à altura e ao comprimento da oclusão.

Referências Bibliográficas

- [1] MANCERA, Paulo F. A. and Hunt, R. **Some experiments with high order compact methods using a computer algebra software** – Part I *Applied Mathematics and Computation*, vol. 174, pp. 775-794 (2006).
- [2] MANCERA, Paulo F. A. and Hunt, R. **Some experiments with high order compact methods using a computer algebra software** – Part II (non-uniform grid) *Applied Mathematics and Computation*, vol. 180, pp. 233-241 (2006).
- [3] MALHEIROS, Jackeline M. and Mancera, Paulo F. A. **Simulation of the Navier-Stokes equations in an occlusion channel** (*Submetido*).